SOLUCIONES DE EJERCICIOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Calcular el valor de X y Y en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = \sqrt{3} \\ x - y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

De la 2^a ecuación aislamos x

$$x = \frac{\pi}{2} + y$$

Y sustituimos dicha expresión en la 1^a ecuación:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \cos y = \sqrt{3} \qquad (5)$$

Nota a) : Como $\sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos y + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin y = {}^{2}\cos y$; *entonces, podemos transformar la expresión que hay a la izquierda de la igualdad de la siguiente manera:*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \sin y = 2\cos y$$

Quedando la ecuación (5) así:

$$2\cos y = \sqrt{3} \rightarrow \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

[2] $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Los valores de y que se obtienen son

$$y = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Obtenidos todos los valores de la incógnita "y" , vamos a calcular los correspondientes valores de la incógnita "x".(recuerda que $x = \frac{\pi}{2} + y$)

$$\left[\begin{array}{c} \text{Si } y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \to x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \text{Si } y = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \to x = \frac{\pi}{2} + \frac{11\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2(k+1)\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

El conjunto solución del sistema es:

$$S = \left\{ \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{\pi}{3} + 2(k+1)\pi \,, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen} y \cdot sen\, x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si realizamos el siguiente cambio de variable $\sin x = Z$ y $\cos x = T$. , tendremos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} Z = 2T \\ ZT = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Multiplicamos la 1^a ecuación por T y la 2^a por -1

$$\begin{cases} ZT = 2T^2 \\ -ZT = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$0 = 2T^2 - \frac{1}{2} \to T^2 = \frac{1}{4} \to T = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{Si } T = \frac{1}{2} \to Z = 1 \\ \text{Si } T = -\frac{1}{2} \to Z = -1 \end{array} \right]$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\left[\begin{array}{c} \text{Si } \sin x = \frac{1}{2} \to \sin y = 1 \\ \text{Si } \sin x = -\frac{1}{2} \to \sin y = -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c} \text{Si } x = \left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \to y = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ \text{Si } x = \left\{\begin{array}{l} \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \to y = \frac{3\pi}{2} + k\pi \end{array}\right]$$

La solución del sistema es el conjunto de puntos del plano siguiente:

$$S = \left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right\} \cup \left\{\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right\} \cup \left\{\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right)\right\} \cup \left\{\left(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right)\right\}$$

donde $k \in \mathbb{Z}$