SOLUCIONES DE DERIVADAS DE RAÍCES

1. **Realiza las siguientes demostraciones**

   a) Solución : Hay que derivar la función f definida por :

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

Primero convertimos la raíz en una potencia :

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

Hemos convertido la función en un polinomio, y eso lo sabemos derivar! Lo tenemos en la tabla, así que derivamos :

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

A partir de aquí hacemos los siguientes arreglos con el exponente (reglas de las potencias y las raíces) :

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

b) Solución : Ahora es más difícil, porque en lugar de tener una x, tenemos una función. Derivaremos la función g con la regla de la cadena :

$$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$$

Primero expresamos g como composición de las siguientes funciones a y b :

$$a(x) = \sqrt[n]{x} \qquad b(x) = f(x)$$

Está claro que las hemos escogido bien, ya que si hacemos la composición :

$$a\big(b(x)\big) = a\big(f(x)\big) = \sqrt[n]{f(x)}$$

Entonces, sabemos que la regla de la cadena nos dice que :

$$[a\big(b(x)\big)]' = a'\big(b(x)\big) \cdot b'(x)$$

Así que derivamos las funciones a, b (la primera es muy fácil, ya lo hemos hecho en el apartado anterior) :

$$a'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \qquad b'(x) = f'(x)$$

Y aplicamos finalmente la regla de la cadena :

$$\big[a\big(b(x)\big)\big]' = a'\big(b(x)\big) \cdot b'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$$

2. Deriva las siguientes funciones

Soluciones :

$$a'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(3x^2+3)^3}}$$

$$b'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$c'(x) = \frac{x(3x+4)}{2\sqrt{(1+x)^3}}$$

$$d'(x) = -\frac{\cos(x)}{5\sqrt[5]{\sin(x)^6}}$$

$$e'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{2\sqrt{\sin(x) + \cos(x)}}$$

$$g'(x) = \frac{x^6 + x^{-8}}{\sqrt[7]{(x^7 - x^{-7})^6}}$$

$$h'(x) = \frac{2}{3x\sqrt[3]{\ln(x)}}$$