UNPROFESOR

SOLUCIONES DE: OPERACIONES CON RADICALES

1.-Expresión de un radical en forma de potencia

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

$$5^{0.5} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$12^{0.2} = 12^{\frac{2}{10}} = 12^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}} = x^{-\frac{1}{5}}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{15+10+12}{30}} = x^{\frac{37}{30}}$$

2.-Simplificación de radicales

Si existe un número natural que divida al índice y al exponente (o los exponentes) del radicando, se obtiene un radical equivalente.

$$\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$

$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[2]{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$

$\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

3.-Reducción de radicales a índicecomún

1Hallamos el **mínimocomúnmúltiplo de los índices**, que será el comúníndice

2Dividimos el comúníndice por cada uno de los índices y cada resultadoobtenido **se multiplica por susexponentes** correspondientes.

$\sqrt{2}$ $\qquad \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}$ $\qquad \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$

$\text{m.c.m.}(2, 3, 4) = 12$

$\sqrt[12]{2^6}$ $\qquad \sqrt[12]{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4}$ $\qquad \sqrt[12]{(2^2)^3 \cdot (3^3)^3}$

$\sqrt[12]{2^6}$ $\qquad \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8}$ $\qquad \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^9}$

4.-Extracción de factores fuera del signo radical

Se descompone el radicando **en factores**. Si:

Un **exponente es menor** que el índice, el factor correspondiente **se deja en el radicando**.

$\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3}$

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$$

Un **exponente es igual** al índice, el factor correspondiente **salefuera del radicando**.

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{98} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = 7\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

Un exponente **es mayor que el índice**, **se divide** dichoexponente **por el índice**.
El **cociente**obtenido es el **exponente del factor fuera** del radicando y el **resto** es el **exponente del factor dentro** del radicando.

$$\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3\sqrt[3]{3^2}$$

$$\begin{array}{l|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

$$\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot 5^2 \sqrt{2 \cdot 5}$$

$$\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}$$

5.-Introducción de factores dentro del signo radical

Se introduce los factores elevados al índicecorrespondiente del radical.

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\,b}$$

$$2^2\cdot 3^3\,\sqrt[4]{6}$$

$$=\sqrt[4]{(2^2)^4\cdot(3^3)^4\cdot 2\cdot 3}=$$

$$=\sqrt[4]{2^8\cdot 3^{12}\cdot 2\cdot 3}=\sqrt[4]{2^9\cdot 3^{13}}$$

$$2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{\frac{2^3}{4}}=\sqrt[3]{2}$$

$$2\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$$

$$2\sqrt[4]{\frac{5}{12}}=\sqrt[4]{\frac{2^4\cdot 5}{12}}=\sqrt[4]{\frac{2^4\cdot 5}{2^2}}=\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}=\sqrt[3]{\frac{2^3\cdot 3^2}{3^3\cdot 2^2}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

6.-Suma de radicales

Solamentepuedensumarse (o restarse) dos radicalescuando son radicalessemejantes, es decir, si son radicales con el mismoíndice e igual radicando.

$$a\sqrt[n]{k}+b\sqrt[n]{k}+c\sqrt[n]{k}=(a+b+c)\sqrt[n]{k}$$

$$2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\sqrt{2}=(2-4+1)\sqrt{2}=-\sqrt{2}$$

$$3\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{5}=(3-2-1)\sqrt[4]{5}=0$$

$$\sqrt{12}-3\sqrt{3}+2\sqrt{75}=\sqrt{2^2\cdot 3}-3\sqrt{3}+2\sqrt{5^2\cdot 3}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+10\sqrt{3}=9\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{8}-\sqrt[12]{64}=\sqrt[4]{2^2}+\sqrt[6]{2^3}-\sqrt[12]{2^6}=\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{12}-3\sqrt{75}+\sqrt{27}=$$

$$2\sqrt{2^2\cdot 3}-3\sqrt{3\cdot 5^2}+\sqrt{3^3}=4\sqrt{3}-15\sqrt{3}+3\sqrt{3}=-8\sqrt{3}$$

$$\sqrt{24}-5\sqrt{6}+\sqrt{486}=\sqrt{2^3\cdot 3}-5\sqrt{6}+\sqrt{2\cdot 3^5}=2\sqrt{6}-5\sqrt{6}+9\sqrt{6}=6\sqrt{6}$$

$$2\sqrt{5}+\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80}=2\sqrt{5}+\sqrt{3^2\cdot 5}+\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}-\sqrt{2^4\cdot 5}=$$

$$=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}+6\sqrt{5}-4\sqrt{5}=7\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\sqrt[3]{2^4}+\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=$$

$$=3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}=6\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{250}+\sqrt[6]{4}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=$$

$$=\sqrt[3]{2^4}+\sqrt[3]{2\cdot 5^3}+\sqrt[6]{2^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}=$$

$$=2\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2\cdot\sqrt[3]{2}}}=$$

$$= 2\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{15}{2}\sqrt[3]{2}$$

7.-Producto de radicales

Radicales del mismo índice

Para multiplicar radicales con el mismoíndice **se multiplican los radicandos y se deja el mismoíndice**.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} =$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Radicales de distinto índice

Primero se reducen a índicecomún y luego se multiplican.

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} =$$

$$m.c.m.(2,3,4) = 12$$

$$\sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{(3^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\sqrt[12]{3^{11}}$$

$$\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} =$$

$$\text{m.c.m.}(2,3) = 6$$

$$\sqrt[6]{12^3} \cdot \sqrt[6]{36^2} = \sqrt[6]{\left(2^2 \cdot 3\right)^3 \cdot \left(2^2 \cdot 3^2\right)^2} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{2^{10} \cdot 3^7} = 6\sqrt[6]{2^4 \cdot 3}$$

8.-Cociente de radicales

Para dividir radicales con el mismoíndice **se dividen los radicandos y se deja el mismoíndice.**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} =$$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{\left(2^2\right)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$$

Radicales de distinto índice

Primero se reducen a índicecomún y luego se dividen.

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} =$$

$$\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{\frac{(256)^3}{16^2}} = \sqrt[6]{\frac{\left(2^8\right)^3}{\left(2^4\right)^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^{24}}{2^8}} =$$

$$= \sqrt[6]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^8} = 2^2\,\sqrt[3]{2^2} = 4\,\sqrt[3]{4}$$

$$\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^4}} =$$

$$= \sqrt[12]{\frac{a^6\cdot\left(a^2\right)^4\cdot\left(a^3\right)^3}{\left(a^4\right)^2}} = \sqrt[12]{\frac{a^6\cdot a^8\cdot a^9}{a^8}} = \sqrt[12]{a^{15}} = \sqrt[4]{a^5}$$

9.-Potencia de radicales

Para elevar un radical a una potencia **se eleva a dicha potencia el radicando y se deja el mismoíndice.**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 =$$

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 = \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{\left(2\cdot 3^2\right)^2} = \sqrt[3]{2^2\cdot 3^4} = 3\,\sqrt[3]{12}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 =$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 = \frac{\sqrt[3]{(12)^4}\cdot\sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}} = \frac{\sqrt[3]{\left(2^2\cdot 3\right)^4}\cdot 18}{\sqrt{(2\cdot 3)^4}} =$$

$$= \frac{18\cdot\sqrt[3]{2^8\cdot 3^4}}{\sqrt{2^4\cdot 3^4}} = 18\,\sqrt[6]{\frac{\left(2^8\cdot 3^4\right)^2}{\left(2^4\cdot 3^4\right)^3}} = 18\,\sqrt[6]{\frac{2^{16}\cdot 3^8}{2^{12}\cdot 3^{12}}} =$$

$$= 18\sqrt[6]{\frac{2^4}{3^4}} = 18\sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} = 18\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

10.-Raíz de un radical

La raíz de un radical es otro radical de igual radicando y cuyoíndice es el producto de los dos índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} =$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4\sqrt[4]{2}}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(2^4\right)^4 \cdot 2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{16} \cdot 2}}} = \sqrt[24]{2^{17}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\frac{1}{8}}}} =$$

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\frac{1}{8}}}} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2^{-3}}}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{\frac{2^2}{\left(2^{-3}\right)^3}}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{\frac{2^2}{2^{-9}}}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^{11}}} = \sqrt[24]{2^{11}}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{2 \cdot 2^2}}}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}}}} = \sqrt[72]{2^3} = \sqrt[24]{2}$$