Soluciones de operaciones con funciones reales

Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones reales de variable real y de dominios Dom(f) y Dom(g), respectivamente.

Suma de funciones

Llamamos **suma de f y g**, a una operación real que denominamos (f + g) tal que:

(f + g) (x) = f(x) + g(x) , para todo x ∊ [Dom(f) ∩ Dom(g)]

Llamamos **función nula o función cero** a aquella función que asigna a cualquier elemento del dominio el valor 0 como imagen. La expresamos por **0**.

Se verifica que:

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x)$$

Por tanto, la función nula es el **elemento neutro** para la suma de funciones.

Dada una función f definida en D, llamamos **función opuesta de f**, y la expresamos por - f, a la función:

$$
\begin{aligned}
-f:\ D &\longrightarrow \mathbb{R}\\
x &\longrightarrow (-f)(x) = -f(x)
\end{aligned}
$$

La función opuesta verifica que para toda función f se cumple que:

$$f + (-f) = (-f) + f = 0$$

La función opuesta es el **elemento opuesto** para la suma de funciones.

Ejemplos de suma de funciones

Dadas las funciones f y g , vamos a hallar (f + g):

a) $f(x) = x - 5 \quad ; \qquad g(x) = \dfrac{5}{x+1}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x - 5 + \frac{5}{x+1} = \frac{(x-5)(x+1)+5}{x+1} = \frac{x^2 - 4x}{x+1}$$

Como Dom(f) = R y Dom(g) = R - {1} , tenemos que:

Dom(f + g) = Dom(f) ∩ Dom(g) = R ∩ [R - {1}] = R - {1}

b) $f(x) = \sqrt{x - 9}$; $g(x) = \sqrt{5 - x}$

Veamos si es posible efectuar la suma de estas funciones.

Como Dom(f) = [9 , ∞) y Dom(g) = (-∞ , 5] , tenemos que:

Dom(f + g) = Dom(f) ∩ Dom(g) = [9 , ∞) ∩ (-∞ , 5] = ∅

No hay ningún elemento que pertenezca a la intersección de los dominios de f y g, por lo que no existe f + g.

Producto de funciones

Llamamos **producto de f por g**, y lo expresamos por (f · g), a la función:

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, para todo $x \in [Dom(f) \cap Dom(g)]$

Llamamos **función unidad**, y la expresamos por **1**, a aquella función que a cada número real le asigna el número real 1.

Se verifica que:

$$(f \cdot 1)(x) = f(x) \cdot 1(x) = f(x)$$

La función unidad el **elemeno neutro** para el producto de funciones.

Dada una función f de dominio D, tal que $f(x) \neq 0$ para todo valor x de D, llamamos **función recíproca de f**, y la expresamos por 1/f, a la función:

$$\begin{aligned} 1/f:\ D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow (1/f)(x) = 1/f(x) \end{aligned}$$

La función recíproca es el **elemento inverso** para el producto de funciones.

Si f es una función que se anula en algún punto de su dominio D, el dominio de 1/f es:

$$Dom(1/f) = D - \{ x \in D \,/\, f(x) = 0 \}$$

Ejemplo de producto de funciones

Dadas las funciones f y g , vamos a hallar (f · g):

$$f(x) = \sqrt{x - 3} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x - 3} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{\sqrt{x - 3}}{x+2}$$

Como Dom(f) = [3 , ∞) y Dom(g) = R - {-2} , tenemos que:

$$Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g) = [3, \infty) \cap R - \{-2\} = [3, \infty)$$

Ejemplo de función recíproca

Vamos a hallar la función recíproca de f, donde f es:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq -1\\ x^2 & \text{si } x > -1\end{cases}$$

Hacemos (1/f)(x):

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\begin{cases}x & \text{si } x \leq -1\\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > -1 \text{ y } x \neq 0\end{cases}$$

Vemos que: Dom(f) = R

Y además f(x) = 0 sólamente si x = 0. Luego: {x ∈ R / f(x) = 0} = {0}

Por tanto el dominio de la función recíproca de f es:

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{1}{f}\right)=\mathrm{Dom}(f)-\{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x)=0\}=\mathbb{R}-\{0\}$$

Cociente de funciones

Llamamos **cociente de f y g** a otra función real que denominamos por f/g, tal que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{, para todo} \quad x \in [\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)] - \{x \,/\, g(x) = 0\}$$

Ejemplo de cociente de funciones

Dadas las funciones f y g , vamos a hallar (f/g):

$$f(x) = \sqrt{x-2} \quad ; \qquad g(x) = \frac{x-5}{x+3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-2}}{\dfrac{x-5}{x+3}} = \frac{\sqrt{x-2}\cdot(x+3)}{x-5}$$

Observamos que g(x) = 0 sólamente si x = 5.
Luego: {x / g(x) = 0} = {5}

Como Dom(f) = [2 , ∞) y Dom(g) = R - {-3} , tenemos que:

Dom(f / g) = [Dom(f) ∩ Dom(g)] - {x / g(x) = 0} = [[2 , ∞) ∩ R - {-3}] - {5} = [2 , ∞) - {5}