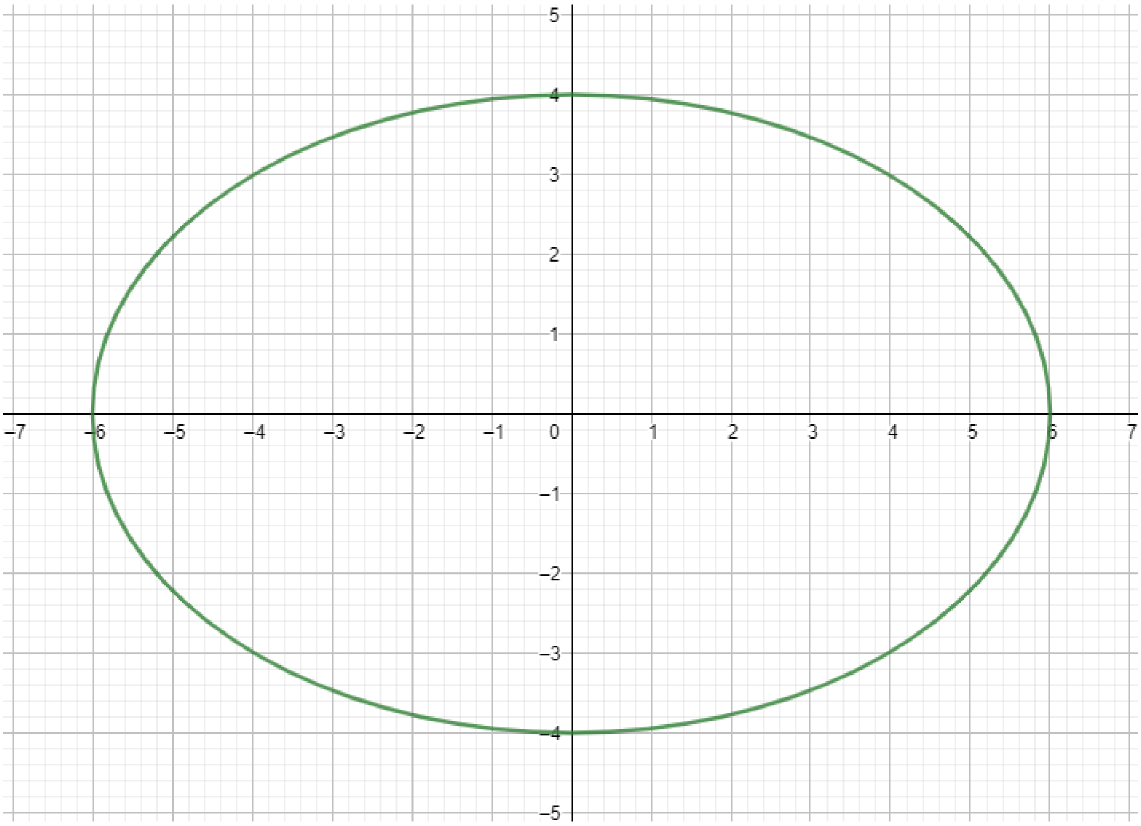
SOLUCIONES DE OPTIMIZACIÓN CON DERIVADAS

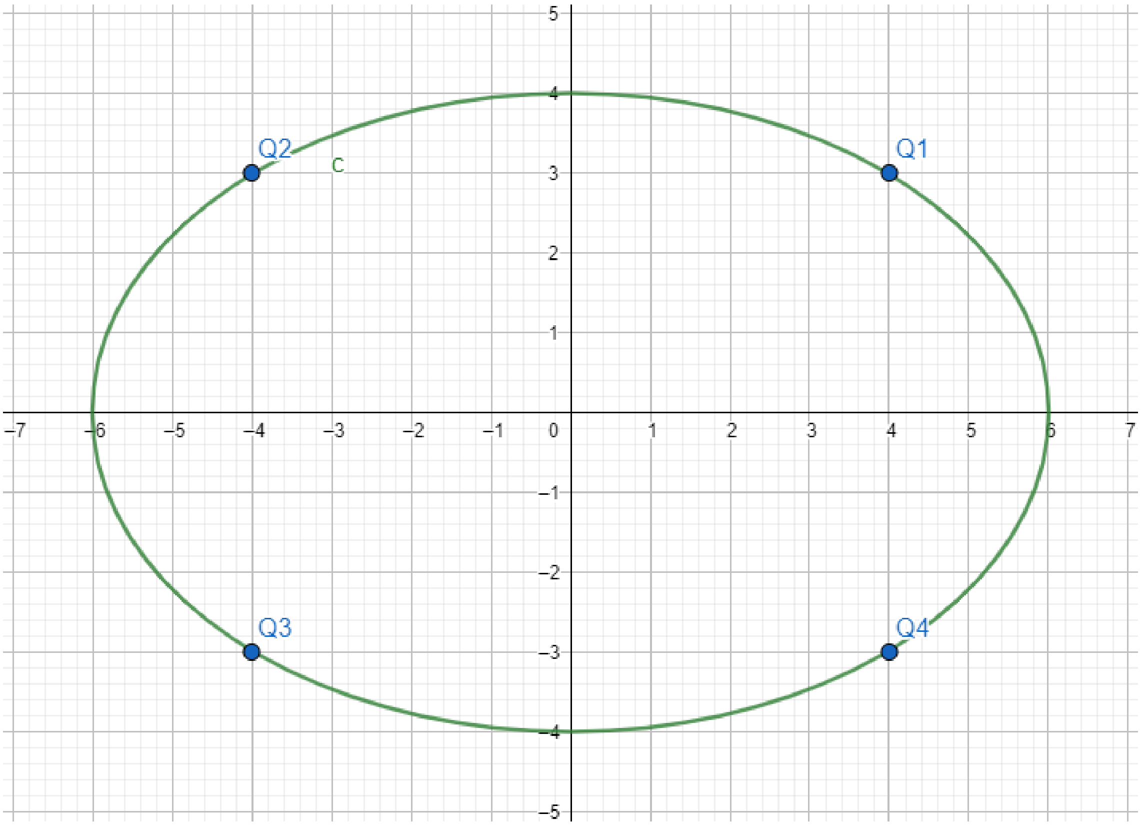
1. Solución

a) He aquí un dibujo :



b) $\left(\frac{x}{6}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$

c) El rectángulo tiene 4 puntos, uno sobre cada cuadrante de la elipse. Llamémoslos Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, puntos en los cuadrantes 1, 2, 3 y 4, respectivamente.



Si $Q_1 = (x, y)$, entonces, $Q_2 = (-x, y)$, $Q_3 = (-x, -y)$ y $Q_4 = (x, -y)$.

Por lo tanto, la base del rectángulo es $2x$ y su altura es $2y$. Como el área de un rectángulo es base por altura, tenemos :

$$A = 4xy$$

Ahora, como sabemos que los puntos se encuentran en la elipse, entonces cumplen la ecuación de esta, o sea, que :

$$\left(\frac{x}{6}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

Si aislamos, por ejemplo, x, tenemos que :

$$x = 6 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y}{4}\right)^2}$$

Si ahora en la fórmula del área cambiamos la x por esta expresión, obtenemos :

$$A = 4 \cdot 6 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y}{4}\right)^2} \cdot y = 24 \cdot y \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y}{4}\right)^2}$$

Recordemos que la y, o sea, la segunda coordenada del punto Q_1, solo puede tomar valores entre 0 y 4, ya que está dentro del primer cuadrante de la curva de la elipse.

Ahora el área solo nos depende de una variable. Ya la podemos derivar respecto a y.

$$A' = 24 \cdot \left(\sqrt{1 - \left(\frac{y}{4}\right)^2} + y \frac{-\frac{y}{8}}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y}{4}\right)^2}} \right)$$

Igualamos a 0 para encontrar los posibles máximos.

$$A' = 0$$

$$24 \cdot \left(\sqrt{1 - \left(\frac{y}{4}\right)^2} + y \frac{-\frac{y}{8}}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y}{4}\right)^2}} \right) = 0$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{y}{4}\right)^2} = \frac{y^2}{16 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y}{4}\right)^2}}$$

$$1 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \frac{y^2}{16}$$

$$16 - y^2 = y^2$$

$$16 = 2y^2$$

$$8 = y^2$$

$$y = \pm 2\sqrt{2}$$

Descartamos el valor negativo, ya que se sale fuera de nuestro rango de estudio $y \in [0, 4]$. Los posibles máximos entonces son $y = 0$, $y = 2\sqrt{2}$, $y = 4$.

Tanto para $y = 0$ como para $y = 4$, tenemos que $A = 0$, por lo que la única opción que nos queda tiene que ser el máximo por eliminación. Cuando $y = 2\sqrt{2}$, el área es :

$$A = 24 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{4}\right)^2}$$

$$A = 48 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}}$$

$$A = 48 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$A = 48$$

2. Solución

Sea a el número de años que esperemos para vender los cerezos.

Como inicialmente tenemos 400 pero cada año se muere uno, el número de cerezos después de a años es :

$$c = 400 - a$$

Después, como cada uno lo vendo inicialmente a 2000€, pero cada año que pasa este precio sube en 50€, si me espero a años, cada uno lo venderé a :

$$p = 2000 + 50 \cdot a$$

Sea el año que sea en que hago las ventas, los beneficios totales que obtendré serán el beneficio que obtenga con cada cerezo por el número de cerezos que venda, o sea :

$$B = c \cdot p = (400 - a) \cdot (2000 + 50 \cdot a) = -50a^2 + 18000a + 800000$$

Ahora B nos depende solo de a. Recordamos que nuestro rango de estudio es $a \in [0, 400]$, ya que como mínimo podemos esperar 0 años, y si esperamos 400 años, todos los cerezos estarán muertos y no habrán beneficios.

Derivamos respecto a :

$$B' = -100a + 18000$$

Y ahora igualamos a 0 para encontrar el máximo :

$$B' = 0$$

$$-100a + 18000 = 0$$

$$100a = 18000$$

$$a = 180$$

Nuestros posibles máximos son $a = 0$, $a = 180$ y $a = 400$. Cuando $a = 400$, no hay cerezos ni beneficios, así que lo descartamos.

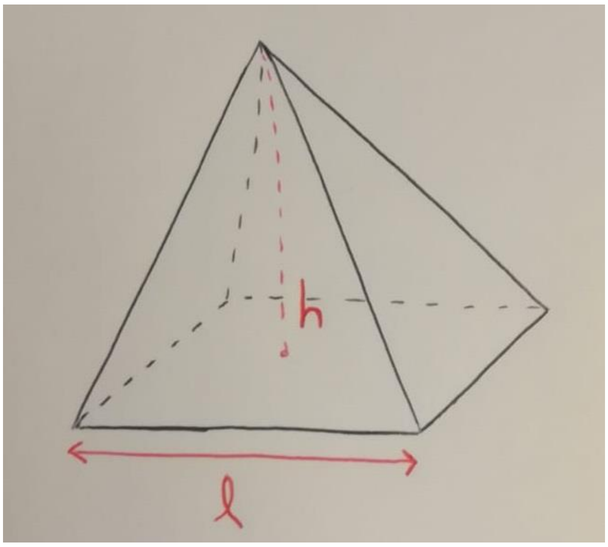
Si $a = 0$, entonces $B = 400 \cdot 2000 = 800000$

Si $a = 180$, entonces $B = 220 \cdot 11000 = 2420000$

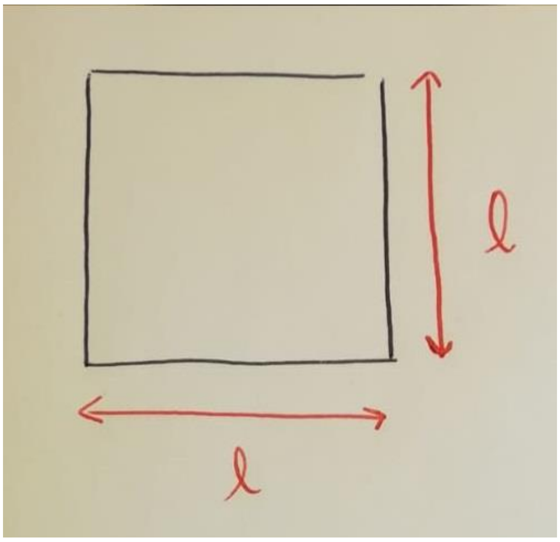
Está claro que hay que esperar 180 años para vender los cerezos. Si lo conseguimos, ganaremos 2.42 millones de euros.

3. Solución

a) Vamos a encontrar el área de la pirámide. Es el área de los 4 triángulos junto al de la base. Echemos un vistazo al siguiente dibujo :

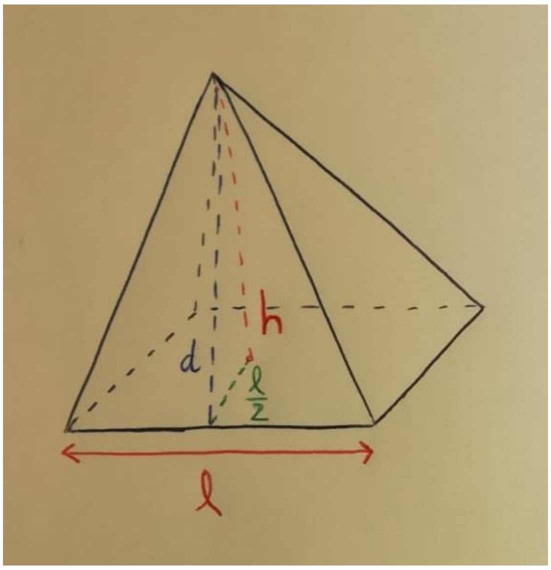


La pirámide tiene una base cuadrada y cuatro triángulos isósceles laterales. Del cuadrado ya tenemos el área, ya que su lado mide l.

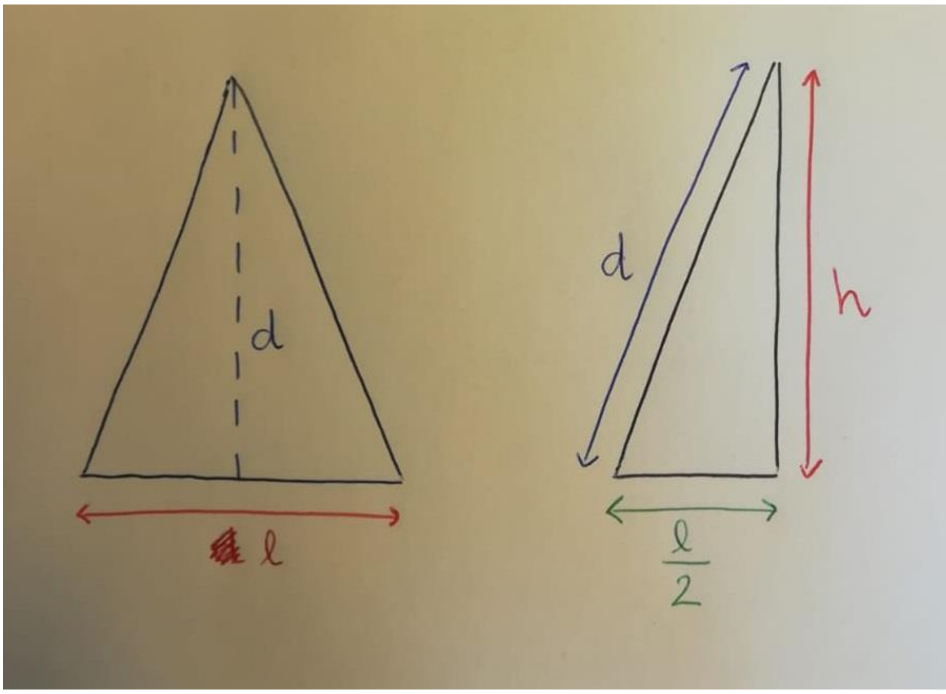


$$A_c = l^2$$

Ahora, para calcular el área de cada triángulo, tenemos su base, pero no su altura d. Si nos fijamos bien en la pirámide, como su base es un cuadrado, la distancia entre el punto medio de la base del triángulo y el centro del cuadrado es $\frac{l}{2}$.



Si aislamos el triangulo lateral y el interior, nos sale :



Con Pitágoras en el segundo triángulo, podemos ver que :

$$d = \sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

Como la altura del triangulo lateral es d, tenemos que su área es :

$$A_t = \frac{l \cdot d}{2} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

Como hay un cuadrado y 4 triangulos, el área total es :

$$A(h, l) = A_c + 4A_t = l^2 + 2 \cdot l \cdot \sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

b) Hay que minimzar esta función, pero depende de dos variables. Usaremos el dato que nos dan al princio, donde nos dan el volumen de la pirámide.

$$V = \frac{h \cdot l^2}{3} = 120$$

$$h = \frac{360}{l^2}$$

Sustituyendo h por esta expresión en el área, obtenemos :

$$A(l) = l^2 + 2 \cdot l \cdot \sqrt{\frac{129600}{l^4} + \frac{l^2}{4}}$$

Retocamos la expresión introduciendo $2 \cdot l$ dentro de la raíz, y obtenemos :

$$A(l) = l^2 + \sqrt{\frac{518400}{l^2} + l^4}$$

Recordamos que nuestro rango de estudio es $l \in (0, +\infty)$, ya que si $l = 0$, la base de la pirámide mide 0 y no tenemos pirámide. A partir de ahí podemos hacer la base tan larga como queramos. Tampoco tiene sentido que la base tome valores negativos.

Derivamos el área respecto l :

$$A'(l) = 2 \cdot l + \frac{-\frac{518400}{l^3} + 2 \cdot l^3}{\sqrt{\frac{518400}{l^2} + l^4}}$$

Igualamos a 0 y resolvemos :

$$2 \cdot l + \frac{-\frac{518400}{l^3} + 2 \cdot l^3}{\sqrt{\frac{518400}{l^2} + l^4}} = 0$$

Obtenemos entonces :

$$l = \sqrt[6]{64800} \approx 6.33766$$

Para ver si es realmente un mínimo, podríamos volver a derivar el área y mirar si su segunda derivada en $\sqrt[6]{64800}$ es positiva. No hace falta hacerlo si, sabiendo que la función que nos define el área es continua, miramos los límites de nuestro rango de estudio y calculamos $A(\sqrt[6]{64800})$.

$$\lim_{l \to 0} A(l) = +\infty$$

$$\lim_{l \to +\infty} A(l) = +\infty$$

$$A\left(\sqrt[6]{64800}\right) = 4 \cdot \sqrt[3]{64800} = 24 \cdot \sqrt[3]{300} \approx 160.66391$$

Está claro que si escogemos $l = \sqrt[6]{64800}$ tendremos el valor mínimo de área, y cuanto más nos alejemos de este l concreto, más grande será el área.

Como detalle, final, el valor de h debe ser (deducido de la expresión anterior) :

$$h = \frac{360}{l^2} = \frac{360}{\sqrt[3]{64800}} = 2\sqrt[3]{90} \approx 8.96281$$