

SOLUCIONES DE LA REGLA DE LA CADENA

1. Realiza las siguientes demostraciones

a) Solución : Hay que derivar la siguiente función :

$$g(x) = \sin(f(x))$$

Nos bastará la regla de la cadena. Vemos que si escogemos las siguientes funciones :

$$a(x) = \sin(x) \quad b(x) = f(x)$$

Claramente, la función g es composición de estas :

$$a(b(x)) = a(f(x)) = \sin(f(x)) = g(x)$$

Así que podemos usar la regla de la cadena. Derivamos las funciones a y b :

$$a'(x) = \cos(x) \quad b'(x) = f'(x)$$

Y construimos la derivada como nos dice la regla de la cadena :

$$g'(x) = a'(b(x)) \cdot b'(x) = a'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$$

b) Solución : Hay que derivar esta función :

$$g(x) = (f(x))^n$$

Lo haremos como el anterior. Escogiendo las siguientes funciones :

$$a(x) = x^n \qquad b(x) = f(x)$$

Claramente, la función g es composición de estas :

$$a(b(x)) = a(f(x)) = f(x)^n = g(x)$$

Así que podemos usar la regla de la cadena. Derivamos las funciones a y b :

$$a'(x) = n \cdot x^{n-1} \qquad b'(x) = f'(x)$$

Y construimos la derivada como nos dice la regla de la cadena :

$$g'(x) = a'(b(x)) \cdot b'(x) = a'(f(x)) \cdot f'(x) = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

c) Solución : Hay que derivar la siguiente función :

$$g(x) = \arctg(f(x))$$

Otra vez, lo haremos como en los apartados anteriores. Está claro que es la composición de estas funciones :

$$a(x) = \arctg(x) \qquad b(x) = f(x)$$

Comprobamos esto último :

$$a(b(x)) = a(f(x)) = \arctg(f(x)) = g(x)$$

Una vez comprobado, podemos usar la regla de la cadena. Derivamos las funciones a y b :

$$a'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad b'(x) = f'(x)$$

Y construimos la derivada como nos dice la regla de la cadena :

$$g'(x) = a'(b(x)) \cdot b'(x) = a'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{1+(f(x))^2} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$$

2. Deriva las siguientes funciones

Soluciones :

$$a'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$$

$$b'(x) = \frac{2 \cdot \operatorname{arctg}(x)}{1 + x^2}$$

$$c'(x) = \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)$$

$$d'(x) = \frac{1}{\ln(\ln(x)) \cdot \ln(x) \cdot x}$$

$$e'(x) = 9 \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^3 + 3x + 7)^2$$

$$f'(x) = \pi \cdot \cos(\pi x)$$

$$g'(x) = -\frac{8}{x}$$

$$h'(x) = 3 \cdot \ln(2) \cdot \cos(x)$$

$$i'(x) = \frac{2x + 1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + x}}$$

$$j'(x) = 2 \cdot e^{24x}$$

$$k'(x) = \ln(74) \cdot 74^{74x+1}$$